Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
10. November 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 6

Abgabe: 20. November 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein Martingal mit $M_0 = 0$ und $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le m\le n} M_m \ge \lambda\right) \le \frac{\operatorname{Var} M_n}{\operatorname{Var} M_n + \lambda^2}$$

gilt, indem Sie zeigen und ausnutzen, dass $\big((M_n + c)^2\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $c \in \mathbb{R}$ ein Submartingal ist, und Ihre Abschätzung in c optimieren.
Bemerkung: Diese Abschätzung ist besser als die Schranke $\frac{\mathbb{E}M_n^2}{\lambda^2}$, die sich direkt aus der Doob-Ungleichung ergibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei wie in Aufgabe 2 auf Blatt 4 eine asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, d.h., S_n ist gegeben durch $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$, wobei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q$, und $p, q \in (0, 1)$, $p + q = 1$ ist. Es sei $p > \frac{1}{2}$.
Zeigen Sie, dass mit $\sigma^2 := 1 - (p - q)^2$ die Varianz der Ersteintrittszeit T_b in $\{b\}$ für $b \in \mathbb{N}$ durch

$$\operatorname{Var} T_b = \frac{b\sigma^2}{(p-q)^3}$$

gegeben ist. Zeigen und benutzen Sie, dass

$$M_n := \big(S_n - (p - q)n\big)^2 - n\sigma^2$$

ein Martingal ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ und die Stoppzeit T sei gegeben durch
$T = \inf\{n : S_n \in \{-a, a\}\}$. Finden Sie zwei Konstanten $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$M_n := S_n^4 - 6nS_n^2 + \kappa n^2 + \lambda n$$

ein Martingal ist. Berechnen Sie damit $\mathbb{E}T^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$ sowie $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $0 < p < 4$ gleichgradig integrierbar ist. Zeigen Sie dazu

$$\mathbb{E}S_n^4 = n\mathbb{E}X_1^4 + 3n(n-1)(\mathbb{E}X_1^2)^2.$$